DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2021A022

一类非线性分数阶 q-差分方程耦合系统边值问题解的存在性*

孟鑫

吉林师范大学数学与计算机学院，吉林 四平 136000

摘　要：考虑了一类非线性Caputo型分数阶 q-差分方程耦合系统边值问题。应用Leray-Schauder非线性抉择和Altman不动点定理证明该耦合系统边值问题解的存在性。最后通过例子说明了主要结论在实际问题中应用。

关键词：分数阶 q-差分方程；耦合系统；边值问题；Leray-Schauder非线性抉择

中图分类号：O175. 8　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097－0137（2023）02－0165－07

Existence of solutions for boundary value problem for a class of coupled system of nonlinear fractional q-difference equations

MENG Xin

College of Mathematics and Computer, Jilin Normal University, Siping 136000, China

Abstract: The boundary value problem for a class of coupled system of nonlinear Caputo fractional q-difference equations is considered. The existence of solutions for the coupled system is obtained by using the Leray-Schauder nonlinear alternative and the Altman fixed point theorem. As applications, some examples are presented to illustrate the main results.

Key words: fractional q-difference equation; coupled system; value problems; Leray-Schauder nonlinear alternative

关于分数阶 q-差分方程的研究始于20世纪初（Carmichael，1912；Adams，1928），非线性分数阶 q-差分方程的边值问题近年来引起了人们广泛的关注，人们利用不动点定理研究非线性分数阶 q-差分方程的边值问题解或正解的存在性和多重性，已经取得了一些成果（El-Shahed et al.，2010；Abdeljawad et al.，2011；Ahmad，2011；Ahmad et al.，2012；Liang et al.，2012；Yang，2013；Zhao et al.，2013a；Zhao et al.，2013b；Abdeljawad et al.，2016；Abdeljawad et al.，2018）。El-Shahed et al.（2010）研究二阶 q-差分方程边值问题

$$\begin{cases} -D_q^{\,2}u(t) = a(t)f(u(t)), & 0 < t < 1, \\ \alpha u(0) - \beta D_q u(0) = 0, \\ \gamma u(1) + \delta D_q u(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性。Ahmad et al.（2012）研究非线性分数阶 q-差分方程非局部边值问题

* **收稿日期：**2021－04－23　　**录用日期：**2021－09－03　　**网络首发日期：**2022－12－30
基金项目：国家自然科学基金（10971084）
作者简介：孟鑫（1980年生），男；**研究方向：**微分方程与动力系统；E-mail：xinmeng@jlnu. edu. cn

$$\begin{cases} {}^cD_q^{\alpha}u(t)=f\big(t,u(t)\big), & 0\leqslant t\leqslant 1, \quad 1<\alpha\leqslant 2,\\ \alpha_1u(0)-\beta_1D_qu(0)=\gamma_1u\big(\eta_1\big), \\ \alpha_2u(1)+\beta_2D_qu(1)=\gamma_2u\big(\eta_2\big) \end{cases}$$

解的存在性与唯一性。然而，关于q-差分耦合系统边值问题的研究成果并不多见。

本文考虑如下非线性分数阶q-差分方程耦合系统的边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_q^{k}u(t)=f\big(t,u(t),v(t)\big), & 0<t<1,\\ {}^cD_q^{l}v(t)=g\big(t,u(t),v(t)\big), & 0<t<1,\\ \alpha u(0)-\beta D_qu(0)=0, & \gamma u(1)+\delta D_qu(1)=0,\\ \alpha v(0)-\beta D_qv(0)=0, & \gamma v(1)+\delta D_qv(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中${}^cD_q^{k}$和${}^cD_q^{l}$分别表示k阶和l阶Caputo分数阶q-导数，$q\in(0,1)$，$1<k,l\leqslant 2$；$f,g\in C\big([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$，$\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$，$\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma>0$.

1 预备知识

设$q\in(0,1)$，定义$[a]_q=\dfrac{q^a-1}{q-1}$，$a\in\mathbb{R}$ 当$n\in\mathbb{N}$，$a,b\in\mathbb{R}$，定义q-类幂函数为

$$(a-b)^{(0)}=1,\ (a-b)^{(n)}=\prod_{k=0}^{n-1}\big(a-bq^k\big).$$

若$\alpha\in\mathbb{R}$，则

$$(a-b)^{(\alpha)}=a^{\alpha}\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-bq^n}{a-bq^{\alpha+n}}\right).$$

q-Gamma函数定义为

$$\Gamma_q(x)=\frac{(1-q)^{(x-1)}}{(1-q)^{x-1}},\qquad x\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}.$$

易证明$\Gamma_q(x+1)=[x]_q\Gamma_q(x)$.

函数f的q-导数定义为

$$\big(D_qf\big)(x)=\frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x},\qquad \big(D_qf\big)(0)=\lim_{x\to 0}\big(D_qf\big)(x).$$

函数f在$[0,b]$的q-积分定义为

$$\big(I_qf\big)(x)=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}_qt=x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}f\big(xq^n\big)q^n,\qquad x\in[0,b].$$

更多关于分数阶q-积分和q-导数概念与基本结果见文献（Kac et al.，2002）。

设$C\big([0,1]\big)$为从$[0,1]$到$\mathbb{R}$的连续函数全体按范数$\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$构成的Banach空间。

引理1 设函数$h\in C\big([0,1]\big)$，$1<k\leqslant 2$，$q\in(0,1)$，$\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$，$\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma>0$，则边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_q^{k}u(t)=h(t), & 0<t<1,\\ \alpha u(0)-\beta D_qu(0)=0, \\ \gamma u(1)+\delta D_qu(1)=0 \end{cases}$$

有唯一解$u(t)=\int_0^1 G_k(t,qs)\,h(s)\,\mathrm{d}s$，其中Green函数

$$G_k(t,qs)=\begin{cases}-\dfrac{(\beta+\alpha t)\left[(1-qs)^{(k-1)}-\delta[k-1]_q(1-qs)^{(k-2)}\right]}{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k)}, & 0\leqslant t<s\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{(t-qs)^{p-1}}{\Gamma_q(k)}-\dfrac{(\beta+\alpha t)\left[(1-qs)^{(k-1)}-\delta[k-1]_q(1-qs)^{(k-2)}\right]}{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

证明　因为

$$u(t)=\int_0^t\frac{(t-qs)^{(k-1)}}{\Gamma_q(k)}h(s)\,\mathrm{d}_qs-c_0-c_1t,$$

$$D_qu(t)=\int_0^t\frac{(t-qs)^{(k-2)}}{\Gamma_q(k-1)}h(s)\,\mathrm{d}_qs-c_1,$$

应用边值条件 $\alpha u(0)-\beta D_qu(0)=0,\gamma u(1)+\delta D_qu(1)=0$，得

$$c_0=\frac{\beta}{\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma}\int_0^1\frac{\gamma(1-qs)^{(k-1)}+\delta[k-1]_q(1-qs)^{(k-2)}}{\Gamma_q(k)}h(s)\,\mathrm{d}_qs,$$

$$c_1=\frac{\alpha}{\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma}\int_0^1\frac{\gamma(1-qs)^{(k-1)}+\delta[k-1]_q(1-qs)^{(k-2)}}{\Gamma_q(k)}h(s)\,\mathrm{d}_qs.$$

代入 $u(t)$ 中得

$$u(t)=\int_0^t\frac{(t-qs)^{(k-1)}}{\Gamma_q(k)}h(s)\,\mathrm{d}_qs-\int_0^1\frac{(\beta+\alpha t)\left[\gamma(1-qs)^{(k-1)}+\delta[k-1]_q(1-qs)^{(k-2)}\right]}{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k)}h(s)\,\mathrm{d}_qs.$$

证毕

引理 2(Agarwal et al.，2003)(Leray-Schauder 非线性抉择)　设 Ω 是赋范线性空间 X 中的一个有界开集，且 $0\in\Omega$. 若 $F\colon\bar{\Omega}\to X$ 是全连续的，并满足 Leray-Schauder 边界条件，即当 $x\in\partial\Omega$，$\lambda>1$ 时，

$$F(x)\neq\lambda x,$$

则 F 在 $\bar{\Omega}$ 中至少有一个不动点。

引理 3(Smart，1974)(Altman 不动点定理)　设 Ω 是 Banach 空间 X 中的一个有界开集，$0\in\Omega$. 若 $F\colon\bar{\Omega}\to X$ 为全连续，且

$$\|Fu-u\|^2\geqslant\|Fu\|^2-\|u\|^2,\qquad u\in\partial\Omega,$$

则 F 在 $\bar{\Omega}$ 中至少有一个不动点。

2　主要结果

对于 Banach 空间 $U=C([0,1])$，其中范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$，在 $U\times U$ 上定义范数 $\|(u,v)\|=\max\{\|u\|,\|v\|\}$，则 $(U\times U,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。

对任意 $(u,v)\in U\times U$，$t\in[0,1]$，定义算子 Φ 为

$$\begin{aligned}\Phi(u,v)(t)&=\left(\Phi_1u(t),\Phi_2v(t)\right)\\&=\left(\int_0^1G_k(t,qs)f(s,u(s),v(s))\,\mathrm{d}_qs,\int_0^1G_l(t,qs)g(s,u(s),v(s))\mathrm{d}_qs\right).\end{aligned}$$

由引理 1 知算子 Φ 的不动点即为边值问题(1)的解。设 f，$g\in C([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，根据 Arzela-Ascoli 定理易证算子 Φ_1 和 Φ_2 均是全连续的，从而算子 Φ 是全连续的。

定理1 设存在常数$M_1, M_2 > 0$，使得

$$\left|f(t,u,v)\right| \leqslant \kappa_k|u| + M_1, \qquad t \in [0,1],\ u,v \in \mathbb{R},$$

$$\left|g(t,u,v)\right| \leqslant \kappa_l|v| + M_2, \qquad t \in [0,1],\ u,v \in \mathbb{R},$$

其中

$$0 < \kappa_k < \frac{(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma)\Gamma_q(k+1)}{(2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\delta) + (\alpha + \beta)\delta[k]_q},$$

$$0 < \kappa_l < \frac{(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma)\Gamma_q(l+1)}{(2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\delta) + (\alpha + \beta)\delta[l]_q},$$

则边值问题(1)至少存在一个解。

证明 当$\lambda > 1$，$(u,v) \in U \times U$时，若$\Phi(u,v) = \lambda(u,v)$成立，则对任意$t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\left|u(t)\right| &= \left|\frac{1}{\lambda}\Phi_1 u(t)\right| \\
&\leqslant \int_0^t \frac{(t-qs)^{(k-1)}}{\Gamma_q(k)}\left|f(s,u(s),v(s))\right| \mathrm{d}_q s \\
&\quad + \int_0^1 \frac{(\beta + \alpha t)\left[\gamma(1-qs)^{(k-1)} + \delta[k-1]_q(1-qs)^{(k-2)}\right]}{(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma)\Gamma_q(k)}\left|f(s,u(s),v(s))\right| \mathrm{d}_q s \\
&\leqslant \left(\kappa_k\|u\| + M_1\right)\left[\int_0^1 \frac{(1-qs)^{(k-1)}}{\Gamma_q(k)}\mathrm{d}_q s + \int_0^1 \frac{(\beta+\alpha)\gamma(1-qs)^{(k-1)} + (\beta+\alpha)\delta[k-1]_q(1-qs)^{(k-2)}}{(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma)\Gamma_q(k)}\mathrm{d}_q s\right] \\
&\leqslant \left(\kappa_k\|u\| + M_1\right)\frac{(2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\delta) + (\alpha + \beta)\delta[k]_q}{(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma)\Gamma_q(k+1)}.
\end{aligned}$$

因此

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]}\left|u(t)\right| \leqslant \left(\kappa_k\|u\| + M_1\right)\frac{(2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\delta) + (\alpha + \beta)\delta[k]_q}{(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma)\Gamma_q(k+1)}.$$

解得

$$\|u\| \leqslant \frac{\left[(2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\delta) + (\alpha + \beta)\delta[k]_q\right]M_1}{(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma)\Gamma_q(k+1) - \kappa_k\left[(2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\delta) + (\alpha + \beta)\delta[k]_q\right]} =: R_1.$$

同理可证

$$\|v\| \leqslant \frac{\left[(2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\delta) + (\alpha + \beta)\delta[l]_q\right]M_1}{(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma)\Gamma_q(l+1) - \kappa_l\left[(2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\delta) + (\alpha + \beta)\delta[l]_q\right]} =: R_2.$$

于是

$$\left\|(u,v)\right\| = \max\left\{\|u\|, \|v\|\right\} \leqslant \max\left\{R_1, R_2\right\}.$$

令$R = \max\left\{R_1, R_2\right\} + 1$，取$\Omega_R = \left\{(u,v): \left\|(u,v)\right\| \leqslant R\right\}$. 则

$$\Phi(u,v) \neq \lambda(u,v), \qquad (u,v) \in \Omega_R.$$

根据引理2，边值问题(1)至少存在一个解。

例1　考虑耦合系统边值问题

$$\begin{cases} {}^{c}D_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}u(t)=\dfrac{1}{3\pi}\sin\left(\dfrac{3\pi u(t)}{5}\right)+\dfrac{v(t)\mathrm{e}^{-\sin^2 u(t)}}{1+|v(t)|}, & 0<t<1,\\ {}^{c}D_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}v(t)=\dfrac{1}{2\pi}\arctan\left(\dfrac{2\pi v(t)}{3}\right)+\dfrac{t^2u(t)+2v(t)}{\mathrm{e}^{t+2}\left(1+|u(t)|+|v(t)|\right)}, & 0<t<1,\\ u(0)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}D_q u(0)=0, \quad u(1)+\dfrac{1}{2}D_q u(1)=0, \\ v(0)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}D_q v(0)=0, \quad v(1)+\dfrac{1}{2}D_q v(1)=0. \end{cases} \tag{2}$$

其中$\alpha=\gamma=1$，$\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\delta=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{2}$，$k=\dfrac{3}{2}$，$l=\dfrac{5}{4}$，

$$f(t,u,v)=\frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi u}{5}\right)+\frac{v\mathrm{e}^{-\sin^2 u}}{1+|v|}, \qquad g(t,u,v)=\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{2\pi v}{3}\right)+\frac{t^2u+2v}{\mathrm{e}^{t+2}\left(1+|u|+|v|\right)}.$$

则

$$|f(t,u,v)|\leqslant\frac{2}{5}|u|+1=\kappa_k|u|+M_1, \qquad t\in[0,1], \quad u,v\in\mathbb{R},$$

$$|g(t,u,v)|\leqslant\frac{1}{3}|v|+2=\kappa_l|v|+M_2, \qquad t\in[0,1], \quad u,v\in\mathbb{R},$$

其中$\kappa_k=\dfrac{2}{5}$，$\kappa_l=\dfrac{1}{3}$，$M_1=1$，$M_2=2$，且

$$0<\kappa_k=\frac{2}{5}<0.416<\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\Gamma_q\left(\frac{5}{2}\right)}{\left(5+2\sqrt{2}\right)+\left(2+\sqrt{2}\right)\left[\frac{3}{2}\right]_{\frac{1}{2}}}=\frac{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k+1)}{(2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\delta)+(\alpha+\beta)\delta[k]_q},$$

$$0<\kappa_l=\frac{1}{3}<0.404<\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\Gamma_q\left(\frac{9}{4}\right)}{\left(5+2\sqrt{2}\right)+\left(2+\sqrt{2}\right)\left[\frac{5}{4}\right]_{\frac{1}{2}}}=\frac{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(l+1)}{(2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\delta)+(\alpha+\beta)\delta[l]_q}.$$

根据定理1，边值问题(2)至少存在一个解。

定理2　若存在正数M_3，使得对所有$t\in[0,1]$，$|u|\leqslant M_3$，$|v|\leqslant M_3$，

$$|f(t,u,v)|\leqslant\frac{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k+1)M_3}{(2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\delta)+(\alpha+\beta)\delta[k]_q},$$

$$|g(t,u,v)|\leqslant\frac{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(l+1)M_3}{(2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\delta)+(\alpha+\beta)\delta[l]_q},$$

则边值问题(1)至少存在一个解。

证明　定义$V=\left\{u\in C([0,1]):\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|<M_3\right\}$. 则$V\times V$是Banach空间$(U\times U,\|\cdot\|)$的开子集。对任意$(u,v)\in\bar{V}\times\bar{V}$，定义算子$\Psi$为

$$\begin{aligned}\Psi(u,v)(t)&=\left(\Psi_1u(t),\Psi_2v(t)\right)\\&=\left(\int_0^1 G_k(t,qs)f(s,u(s),v(s))\,\mathrm{d}_qs,\ \int_0^1 G_l(t,qs)g(s,u(s),v(s))\,\mathrm{d}_qs\right).\end{aligned}$$

显然，当$f,g\in C([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$时，算子$\Psi$是全连续的。由引理1知算子$\Psi$的不动点即为边值问

题(1)的解。根据引理3，只需证

$$\|\Psi(u,v)\| \leqslant \|(u,v)\|, \qquad (u,v) \in \partial(V \times V).$$

对所有 $t \in [0,1]$，$(u,v) \in \partial(V \times V)$，

$$\begin{aligned}\left|\Psi_1 u(t)\right| &\leqslant \int_0^t \frac{(t-qs)^{(k-1)}}{\Gamma_q(k)} \left|f(s,u(s),v(s))\right| \mathrm{d}_q s \\ &+\int_0^1 \frac{(\beta+\alpha t)\left[\gamma(1-qs)^{(k-1)}+\delta[k]_q(1-qs)^{(k-2)}\right]}{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k+1)} \left|f(s,u(s),v(s))\right| \mathrm{d}_q s \\ &\leqslant \frac{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k+1)M_3}{(2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\delta)+(\alpha+\beta)\delta[k]_q} \times \frac{(2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\delta)+(\alpha+\beta)\delta[k]_q}{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k+1)} =: M_3.\end{aligned}$$

同理可证 $\left|\Psi_2 v(t)\right| \leqslant M_3$.

因此，对所有 $t \in [0,1]$，$(u,v) \in \partial(V \times V)$，

$$\|\Psi(u,v)\| = \max\left\{\max_{t\in[0,1]}\left\{\left|\Psi_1 u(t)\right|\right\}, \max_{t\in[0,1]}\left\{\left|\Psi_2 v(t)\right|\right\}\right\} \leqslant M_3 = \|(u,v)\|.$$

定理得证。

例2 考虑耦合系统边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} u(t) = \dfrac{4[u(t)]^2}{3\mathrm{e}} \sin\left(\dfrac{5\pi v(t)}{3}\right), & 0<t<1, \\ {}^cD_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} v(t) = \dfrac{6[v(t)]^3}{5\pi} \arctan\left(\dfrac{4\pi u(t)}{3}\right), & 0<t<1, \\ u(0)=0, \qquad D_q u(1)=0, \\ v(0)=0, \qquad D_q v(1)=0. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\alpha=\delta=1$，$\beta=\gamma=0$，$q=\dfrac{1}{2}$，$k=\dfrac{5}{4}$，$l=\dfrac{3}{2}$，

$$f(t,u,v) = \frac{2u^2}{3\mathrm{e}} \sin\left(\frac{5\pi v}{3}\right), \qquad g(t,u,v) = \frac{3v^3}{5\pi} \arctan\left(\frac{4\pi u}{3}\right).$$

对于 $M_3=1$，当 $t \in [0,1]$，$|u| \leqslant M_3$，$|v| \leqslant M_3$ 时

$$\left|f(t,u,v)\right| \leqslant \frac{4|u|^2}{3\mathrm{e}} < 0.613 < \frac{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(k+1)M_3}{(2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\delta)+(\alpha+\beta)\delta[k]_q},$$

$$\left|g(t,u,v)\right| \leqslant \frac{6|v|^3}{5\pi} < 0.504 < \frac{(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma)\Gamma_q(l+1)M_3}{(2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\delta)+(\alpha+\beta)\delta[l]_q}.$$

根据定理2，边值问题(3)至少存在一个解。

参考文献：

ABDELJAWAD T, ALZABUT J, 2018. On Riemann-Liouville fractional q-difference equations and their application to retarded logistic type model[J]. Math Methods Appl Sci, 41(18): 8953-8962.

ABDELJAWAD T, ALZABUT J, BALEANU D, 2016. A generalized q-fractional Gronwall inequality and its applications to non-linear delay q-fractional difference systems[J]. J Inequal Appl, (1): 240.

ABDELJAWAD T, BALEANU D, 2011. Caputo q-fractional initial value problems and a q-analogue Mittag-Leffler function[J].

Commun Nonlinear Sci Numer Simul，16(12)：4682−4688.

ADAMS C R，1928. On the linear ordinary q-difference equation[J]. Ann Math，30(1/2/3/4)：195−205.

AGARWAL R P，GRACE S R，O'REGAN D，2003. Nonoscillatory solutions for discrete equations[J]. Comput Math Appl，45(6/7/8/9)：1297−1302.

AHMAD B，2011. Boundary-value problems for nonlinear third-order q-difference equations[J/OL]. Electron J Differential Equations，94.

AHMAD B，NTOUYAS S K，PURNARAS I K，2012. Existence results for nonlocal boundary value problems of nonlinear fractional q-difference equations[J]. Adv Difference Equ：140.

CARMICHAEL R D，1912. The general theory of linear q-difference equations[J]. Amer J Math，34(2)：147−168.

EL-SHAHED M，HASSAN H A，2010. Positive solutions of q-difference equation[J]. Proc Amer Math Soc，138(5)：1733−1738.

KAC V，CHEUNG P，2002. Quantum calculus[M]. New York：Springer-Verlag.

LIANG S，ZHANG J，2012. Existence and uniqueness of positive solutions for three-point boundary value problem with fractional q-differences[J]. J Appl Math Comput，40(1)：277−288.

SMART D R，1974. Fixed point theorems[M]. Cambridge：Cambridge University Press.

YANG W，2013. Positive solutions for boundary value problems involving nonlinear fractional q-difference equations[J]. Differ Equ Appl，5(2)：205−219.

ZHAO Y，CHEN H，ZHANG Q，2013a. Existence results for fractional q-difference equations with nonlocal q-integral boundary conditions[J]. Adv Difference Equ：48.

ZHAO Y，CHEN H，ZHANG Q，2013b. Existence and multiplicity of positive solutions for nonhomogeneous boundary value problems with fractional q-derivatives[J]. Bound Value Probl：103.

（责任编辑　冯兆永）